ME Matematikai Intézet
Alkalmazott Matematikai Tanszék

1. ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA HÁZI FELADAT

A feladat sorszáma: 40

Egy üzem négyféle erőforrás (E1,...,E4) segítségével négyféle terméket (T1,...,T4) állít elő. Az alábbi táblázat a termékegységre vonatkozó erőforrás-ráfordításokat vagy más néven technológiai együtthatókat, az egyes erőforrásokból felhasználható mennyiségeket (Fh.ef.), az egyes erőforrások egységárát (Ef.e.ár) és az egyes termékek szerelési költségét (Sz.ktg.) tartalmazza.

	T1	T2	T3	T4	Fh.ef.	Ef.e.ár
E1	4	1	2	3	196	79
E2	0	3	4	6	276	81
E3	4	3	2	1	176	87
E4	2	0	6	5	304	51
Sz.ktg.	52	90	55	83		

FELADAT:

A) Meghatározandó az egyes termékekből előállítható mennyiség!
   a) Írja fel a feladat matematikai modelljét!
   b) Határozza meg a termékmennyiségeket háromféle eljárással:
      - Gauss-módszerrel,
      - Gauss-Jordan módszerrel,
      - Pivotálással!
   c) Számítsa ki a technológiai együtthatókat tartalmazó ún. technológiai mátrix inverzét három eljárással:
      - Pivotálással,
      - Gauss-Jordan módszerrel,
      - rendszámnöveléses módszerrel!
   d) Határozza meg a technológiai mátrix LU-felbontását!
   e) Határozza meg a technológiai mátrix determinánsát!
   f) Tekintsük a technológiai mátrix harmadrendű fő minormátrixát, legyen ez egy B mátrix. Határozza meg az alábbi felbontásokat:
      - B*Bt mátrix Choleski-felbontását (Bt a B transzponáltja),
      - B mátrix QR-felbontását,
      - B mátrix GH-felbontását!
   g) Tekintsük a technológiai mátrix másodrendű fő minormátrixát, legyen ez egy C mátrix.
      - Határozza meg a C mátrix sajátértékeit!
      - Határozza meg a C mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó azon sajátvektort, amely egységnyi hosszúságú!

B) Vektor-mátrix műveletek segítségével számítsa ki az alábbiakat!
   a) Egy-egy termékre vonatkozó erőforrásonkénti erőforrás-ráfordítást értékben kifejezve!
   b) Egy-egy termékre vonatkozó összes erőforrás-ráfordítást értékben számolva!
   c) Az előállított termékekhez szükséges összes erőforrás-ráfordítást értékben megadva!
   d) Az előállított termékek összes szerelési költségét!

ME Matematikai Intézet
Alkalmazott Matematikai Tanszék

2. ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA HÁZI FELADAT

A feladat sorszáma: 40

Egy bizonyos gazdasági mutató (Y) változását három fontos hatótényező (X1,X2,X3) befolyásolja. Az alábbi táblázat a vizsgált mutatóra és a hatótényezőkre vonatkozó mérési adatokat tartalmazza.

X1:	1	4	6	7	9	11
X2:	11	8	6	4	3	0
X3:	3	4	7	9	11	13
Y:	16	20	24	27	31	36

FELADAT:

Határozzuk meg a mérési adatokat közelítő Y = a+b*X1+c*X2+d*X3 függvényt a legkisebb négyzetek módszerével!

a) Írja fel a feladat matematikai modelljét és a megoldandó normálegyenletet!
b) A normálegyenletet pivotálással oldja meg!
c) Számítsa ki a normálegyenlet együtthatómátrixának inverzét pivotálással!
d) Tekintsük csak az első hatótényezőt (X1)! Határozza meg ehhez a modellhez tartozó Moore-Penrose féle általánosított inverzet és ennek segítségével a közelítő Y = a+b*X1 függvényt!

---

3. ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA HÁZI FELADAT

A feladat sorszáma: 40

Egy négyszektoros gazdaságban, ahol egy-egy szektor egy-egy terméket állít elő, ismertek a közvetlen ráfordítások, a szektorok nettó kibocsátása és a termékek egységára. A közvetlen ráfordítások mátrixa, a nettó kibocsátás vektora és az árvektor sorrendben a következő:

B T P

0.2	0.1	0.3	0.2
0.2	0.2	0.0	0.3
0.3	0.5	0.3	0.1
0.0	0.2	0.1	0.2

57
50
67
52

46
55
36
52

FELADAT:

Vizsgáljuk meg a fentebb adott négyszektoros gazdasági rendszert!

a) Határozza meg a teljes és a közvetett ráfordításokat!
b) Határozza meg a termékegységre vonatkozó új értéket!
c) Határozza meg a bruttó kibocsátást szektoronként!
d) Határozza meg a szektoronként előállított új értéket!
e) Írja fel az ágazati kapcsolatok mérlegét természetes egységben!
f) Írja fel az ágazati kapcsolatok mérlegét értékben kifejezve!
g) Számítsa ki a pénzegységre eső közvetlen ráfordításokat!

1.feladat

Kiindulási adatok:
A:technológiai mátrix, b: a felhasználható erőforrás mennyiség vektora, p. az erőforrás árvektora, c: szerelési költségvektor,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \cancel{5} & \cancel{6} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 196 \\ 276 \\ 176 \\ 304 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 79 \\ 81 \\ 87 \\ 51 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 52 \\ 90 \\ 55 \\ 83 \end{bmatrix}$$

6 5

a) A matematikai modell felírása:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 196 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 276 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 &= 176 \\ 2x_1 + 0x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 304 \end{aligned}$$

b) Termékmennyiségek meghatározása.

-Gauss-módszerrel:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 196 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 276 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 176 \\ 2 & 0 & \cancel{5} & \cancel{6} & 304 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1.lepes}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 196 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 276 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -20 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 5 & \frac{7}{2} & 206 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2.lepes}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 196 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 276 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{8}{3}\right) & -6 & -204 \\ 0 & 0 & \frac{17}{3} & \left(\frac{9}{2}\right) & 252 \end{bmatrix}$$

6 5

$$\xrightarrow{\text{3.lépés}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 196 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 276 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -6 & -204 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{33}{4} & -\frac{363}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_4 = -\frac{363}{2} / \left(-\frac{33}{4}\right) = 22 \quad x_3 = \frac{-204 - (-6) \cdot 22}{-\frac{8}{3}} = 27 \quad x_2 = \frac{276 - 4 \cdot 27 - 6 \cdot 22}{3} = 12$$

$$x_1 = \frac{196 - 1 \cdot 12 - 2 \cdot 27 - 3 \cdot 22}{4} = 16$$

-Gauss-Jordan módszerrel:

Ezt rész feladatot összevontam hármas feladattal és már itt kiszámítottam a technológiai mátrix inverzét. Az kiinduló mátrixot 4x4-es egységmátrix-szal egészítettem ki.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|cccc} (4) & 1 & 2 & 3 & 196 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 276 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 176 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 5 & 304 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{1.lépés}} \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 49 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3) & 4 & 6 & 276 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -20 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 5 & \frac{7}{2} & 206 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{2..lépés}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 26 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 2 & 92 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{8}{3}\right) & -6 & -204 & -1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{3} & \frac{9}{2} & 252 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{3.lépés}} \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{53}{4} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{153}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{33}{4}\right) & -\frac{363}{2} & -\frac{21}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{17}{8} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{4.lépés}} \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 16 & \frac{5}{22} & -\frac{7}{66} & \frac{1}{33} & -\frac{1}{66} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & -\frac{2}{21} & \frac{5}{33} & \frac{8}{33} & -\frac{4}{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 27 & -\frac{15}{44} & -\frac{1}{11} & \frac{9}{44} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & \frac{7}{22} & \frac{5}{33} & -\frac{17}{66} & -\frac{4}{33} \end{array}\right]$$

$x_1 = 16 \quad x_2 = 12 \quad x_3 = 27 \quad x_4 = 22$

-Pivotálással:

Szintén, hogy meg tudjam határozni az A mátrix inverzét a pivotálást teljes pivottáblán végzem. A pivotelemet zárójelbe tettem.

1.lépés, kiinduló pivottábla, a pivotelemet zárójelbe tettem:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	4	(1)	2	3	196	1	0	0	0
e_2	0	3	4	6	276	0	1	0	0
e_3	4	3	2	1	176	0	0	1	0
e_4	2	0	6	5	304	0	0	0	1

2.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_2	4	1	2	3	196	1	0	0	0
e_2	-12	0	-2	-3	-312	-3	1	0	0
e_3	-8	0	-4	-8	-412	-3	0	1	0
e_4	(2)	0	6	5	304	0	0	0	1

3.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_2	0	1	-10	-7	-412	1	0	0	-2
e_2	0	0	34	27	1512	-3	1	0	6
e_3	0	0	20	(12)	804	-3	0	1	4
a_1	1	0	3	5/2	152	0	0	0	1/2

4.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_2	0	1	5/3	0	57	3/4	0	7/12	1/3
e_2	0	0	(-11)	0	-297	15/4	1	-9/4	-3
a_4	0	0	5/3	1	67	-1/4	0	1/12	1/3
a_1	1	0	-7/6	0	-31/2	5/8	0	-5/24	-1/3

5.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_2	0	1	0	0	12	-2/11	5/33	8/33	-4/33
a_3	0	0	1	0	27	-15/44	-1/11	9/44	3/11
a_4	0	0	0	1	22	7/22	5/33	-17/66	-4/33
a_1	1	0	0	0	16	5/22	-7/66	1/33	-1/66

6.lépés: sorok rendezése az inverz mátrix jobb láthatósága érdekében:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	0	0	16	5/22	-7/66	1/33	-1/66
a_2	0	1	0	0	12	-2/11	5/33	8/33	-4/33
a_3	0	0	1	0	27	-15/44	-1/11	9/44	3/11
a_4	0	0	0	1	22	7/22	5/33	-17/66	-4/33

Mindegyik módszerrel kijött az eredmény.
Tehát a keresett termékmennyiségek. x_1=16, x_2=12, x_3=27, x_4=22

c) A technológiai mátrix inverzének kiszámítása:

-Pivotálással és Gauss-Jordan módszerrel az előző feladat keretén belül meghatároztam.

-Rendszámnöveléses módszerrel:

1.lépés: A mátrix elsőrendű fő minormátrix inverzének kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{(1)} = [4] \to A_{(1)}^{-1} = \left[\frac{1}{4}\right]$$

2.lépés: A másodrendű főminor inverzének kiszámítása:

$$A_{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \to E^{-1} = A_{(1)}^{-1} = \left[\frac{1}{4}\right],\quad F = [1],\quad G = [0],\quad H = [3]$$

$$S = H - GE^{-1}F = [3] - [0]\cdot\left[\frac{1}{4}\right]\cdot[1] = [3] \to S^{-1} = \left[\frac{1}{3}\right]$$

$$E^{-1}FS^{-1} = \left[\frac{1}{4}\right]\cdot[1]\cdot\left[\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{1}{12}\right]$$

$$E^{-1} + E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} = \left[\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{12}\right]\cdot[0]\cdot\left[\frac{1}{4}\right] = \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$S^{-1}GE^{-1} = \left[\frac{1}{3}\right]\cdot[0]\cdot\left[\frac{1}{4}\right] = [0]$$

$$A_{(2)}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3.lépés: A harmadrendű főminor inverzének kiszámítása:

$$A_{(3)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to E^{-1} = A_{(2)}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\quad G = [4 \quad 3],\quad H = [2]$$

$$S = H - GE^{-1}F = [2] - [4 \quad 3]\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \left[-\frac{8}{3}\right] \to S^{-1} = \left[-\frac{3}{8}\right] \quad E^{-1}FS^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\cdot\left[-\frac{3}{8}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} + E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot[4 \quad 3]\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

?

$$-S^{-1}GE^{-1} = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot[4 \quad 3]\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \left[\frac{3}{8} \quad \frac{1}{4}\right]$$

$$A_{(3)}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

4.lépés: Az eredeti A mátrix inverzének kiszámítása:

$$A=\begin{bmatrix}4&1&2&3\\0&3&4&6\\4&3&2&1\\2&0&6&5\end{bmatrix}\to E^{-1}=A_{(3)}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}3\\6\\1\end{bmatrix},\ G=[2\ \ 0\ \ 6],\ H=[5]$$

a) $$S=H-GE^{-1}F=[5]-[2\ \ 0\ \ 6]\begin{bmatrix}\frac{3}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\1\end{bmatrix}=\left[-\frac{33}{4}\right]\to S^{-1}=\left[-\frac{4}{33}\right]$$

b) $$E^{-1}FS^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\1\end{bmatrix}\cdot\left[-\frac{4}{33}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{66}\\\frac{4}{33}\\-\frac{3}{11}\end{bmatrix}$$

c) $$E^{-1}+E^{-1}FS^{-1}GE^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{66}\\\frac{4}{33}\\-\frac{3}{11}\end{bmatrix}[2\ \ 0\ \ 6]\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{22}&-\frac{7}{66}&\frac{1}{33}\\-\frac{2}{11}&\frac{5}{33}&-\frac{8}{33}\\-\frac{15}{44}&-\frac{1}{11}&-\frac{9}{44}\end{bmatrix}$$

d) $$-S^{-1}GE^{-1}=-\left[-\frac{4}{33}\right][2\ \ 0\ \ 6]\begin{bmatrix}\frac{3}{16}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{8}\end{bmatrix}=\left[\frac{7}{22}\ \ \frac{5}{33}\ \ -\frac{17}{66}\right]$$

Mindegyik módszerrel kijött az eredmény.
Tehát A mátrix inverze és a főátlójában szereplő elemek összege:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{22}&-\frac{7}{66}&\frac{1}{33}&-\frac{1}{66}\\-\frac{2}{11}&\frac{5}{33}&\frac{8}{33}&-\frac{4}{33}\\-\frac{15}{44}&-\frac{1}{11}&\frac{9}{44}&\frac{3}{11}\\\frac{7}{22}&\frac{5}{33}&-\frac{17}{66}&-\frac{4}{33}\end{bmatrix}$$

$$\frac{5}{22}+\frac{5}{33}+\frac{9}{44}+\left(-\frac{4}{33}\right)=\frac{61}{132}\approx 0{,}4621$$

d) LU felbontás meghatározása:

Az a) feladatban a Gauss elimináció eredményeképpen megjelenik az U mátrix. Az L mártixot megkapjuk, ha minden lépésben a főátlóban kiválasztott pivotelemmel osztjuk a pivotelemet és az alatta lévő számokat, a pivotelem felett pedig nullákat írunk.

6

$$U=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -6\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{33}{4}\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{17}{8} & 1\end{bmatrix}$$

L+U Az elemeinek összege:73/12+31/8=239/24=9,9583

e) Az A mátrix inverzének meghatározása:

Az LU felbontás eredményeképpen:

$$\det(A)=\det(U)=3\cdot 4\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(-\frac{33}{4}\right)=264$$

f) Az A mártix harmadrendű főminormártixának (B)

BB^T mátrix Cholesky-felbontása:

$$B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$BB^T=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 11 & 23\\ 11 & 25 & 17\\ 23 & 17 & 29\end{bmatrix}$$ BB^T

Gauss-módszerrel

$$\begin{bmatrix}(21) & 11 & 23\\ 11 & 25 & 17\\ 23 & 17 & 29\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}21 & 11 & 23\\ 0 & \frac{404}{21} & \frac{104}{21}\\ 0 & \frac{104}{21} & \frac{80}{21}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}21 & 11 & 23\\ 0 & \frac{404}{21} & \frac{104}{21}\\ 0 & 0 & \frac{256}{21}\end{bmatrix}=U\rightarrow$$

12,1905

$$\rightarrow\overline{U}=\begin{bmatrix}\sqrt{21} & \frac{11}{21}\cdot\sqrt{21} & \frac{23}{21}\cdot\sqrt{21}\\ 0 & \frac{2}{11}\cdot\sqrt{2121} & \frac{52}{2121}\cdot\sqrt{2121}\\ 0 & 0 & \frac{16}{101}\cdot\sqrt{101}\end{bmatrix}\rightarrow\overline{U}^T=\begin{bmatrix}\sqrt{21} & 0 & 0\\ \frac{11}{21}\sqrt{21} & \frac{2}{11}\cdot\sqrt{2121} & 0\\ \frac{23}{21}\cdot\sqrt{21} & \frac{52}{2121}\cdot\sqrt{2121} & \frac{16}{101}\cdot\sqrt{2121}\end{bmatrix}$$

Elemek összege: $2\cdot\left(\frac{55}{21}\cdot\sqrt{21}+\frac{16}{101}\cdot\sqrt{101}+\frac{254}{2121}\cdot\sqrt{418}\right)\approx \underline{38,2185}$

$\frac{404}{21}\cdot\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{404}}=\frac{\sqrt{404}}{\sqrt{21}}=\frac{20,0996}{4,58257}$

12,00198
8,375512
1,129102
1,5920595
23,0966535

12,00198
1,5920595
2,4483933

8,3735

5
0,5
0,6666
−0,1666
−2,1125
3,875
+23,0
−2,6666
−6
−8,25
9,9584

B mátrix QR felbontása:

B^TB mátrix Cholesky-felbontását elvégzem, csak nem transzponálom. Ez adja R-et, majd ezt invertálva (Gauss-Jordan eljárással) és elölről megszorozva B-vel megkapom Q-t.

$$B=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&3&4\\4&3&2\end{bmatrix}$$

$$B^TB=\underbrace{\begin{bmatrix}4&0&4\\1&3&3\\2&4&2\end{bmatrix}}_{B^T}\underbrace{\begin{bmatrix}4&1&2\\0&3&4\\4&3&2\end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix}32&16&16\\16&19&20\\16&20&24\end{bmatrix}}_{B^TB}$$

$19-\frac{1}{2}\cdot16=19-8=11$

$20-\frac{1}{2}\cdot16=20-8=12$

$24-\frac{1}{2}\cdot16=24-8=16$

$16-\frac{12}{11}\cdot12=\frac{176-144}{11}=\frac{32}{11}$

$$\begin{bmatrix}32&16&16\\16&19&20\\16&20&24\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}32&16&16\\0&11&12\\0&12&16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}32&16&16\\0&11&12\\0&0&\frac{32}{11}\end{bmatrix}=U\to$$

$\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

$$\to R=\begin{bmatrix}4\sqrt{2}&2\sqrt{2}&2\sqrt{2}\\0&\sqrt{11}&\frac{12}{11}\sqrt{11}\\0&0&\frac{4}{11}\sqrt{22}\end{bmatrix}$$

$\frac{32}{\sqrt{32}}\quad\frac{16}{\sqrt{32}}\quad\frac{16}{\sqrt{32}}$

$\frac{\frac{32}{11}}{\sqrt{\frac{32}{11}}}=\frac{32}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{32}}=\frac{32}{11}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{11}}=1{,}71$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}(4\sqrt{2})&2\sqrt{2}&2\sqrt{2}&1&0&0\\0&\sqrt{11}&\frac{12}{11}\sqrt{11}&0&1&0\\0&0&\frac{4}{11}\sqrt{22}&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{8}&0&0\\0&\sqrt{11}&\frac{12}{11}\sqrt{11}&0&1&0\\0&0&\frac{4}{11}\sqrt{22}&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-\frac{1}{22}&\frac{\sqrt{2}}{8}&-\frac{\sqrt{11}}{22}&0\\0&1&\frac{12}{11}&0&\frac{\sqrt{11}}{11}&0\\0&0&\frac{4}{11}\sqrt{22}&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{\sqrt{2}}{8}&-\frac{\sqrt{11}}{22}&\frac{\sqrt{22}}{176}\\0&1&1&0&\frac{\sqrt{11}}{11}&-\frac{3\sqrt{22}}{22}\\0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{22}}{8}\end{array}\right]$$

0,176776695
−0,150755672
0,301511344
0,026650089
0,639602149
0,586301969
0,707106781 × 2
0,904534033
0,426401432

Q

$$Q=B\cdot R^{-1}=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&3&4\\4&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{8}&-\frac{\sqrt{11}}{22}&\frac{\sqrt{22}}{176}\\0&\frac{\sqrt{11}}{11}&-\frac{3\sqrt{22}}{22}\\0&0&\frac{\sqrt{22}}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{11}}{11}&\frac{3\sqrt{22}}{22}\\0&\frac{3\sqrt{11}}{11}&\frac{\sqrt{22}}{11}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{11}}{11}&-\frac{3\sqrt{22}}{22}\end{bmatrix}$$

$$\text{Elemek összege}:9\sqrt{2}+\frac{26\sqrt{11}}{11}+\frac{5\sqrt{22}}{11}\approx22{,}6992$$

$4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\sqrt{11}+\frac{12}{11}\sqrt{11}+\frac{4}{11}\sqrt{22}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{11}}{11}+\frac{\sqrt{22}}{11}=$

$=9\cdot\sqrt{2}+\frac{11\sqrt{11}}{11}+\frac{12\sqrt{11}}{11}+\frac{3\sqrt{11}+4\sqrt{22}}{11}+\frac{\sqrt{22}}{11}=$

$=9\sqrt{2}+\frac{26\sqrt{11}}{11}+\frac{5\sqrt{22}}{11}=$

GH felbontás:

G

	a_1	a_2	a_3
e_1	4	(1)	2
e_2	0	3	4
e_3	4	3	2

	a_1	a_2	a_3
a_2	4	1	2
e_2	-12	0	(-2)
e_3	-8	0	-4

	a_1	a_2	a_3
a_2	-8	1	0
a_3	6	0	1
e_3	16	0	0

	a_1	a_2	a_3
a_2	0	1	0
a_3	0	0	1
a_1	1	0	0

H

H mártix a pivotálás végeredménye, a bázistáblából kiolvasható, a G mátrix pedig bázisba vitt vektorok sorrendje adja (a_2, a_3, a_1)

Tehát G és H vektorok:

$$G=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&4&0\\3&2&4\end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\quad GH=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&4&0\\3&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&3&4\\4&3&2\end{bmatrix}=B$$

$$\text{Elemek összege}: 23+3=26$$

B)

a) Egy-egy temékre vonatkozó erőforrás ráfordítás értékben kifejezve ;P·A:
P a p árvektorból képzett diagonális mátrix.

$$PA=\underset{P}{\begin{bmatrix}79&0&0&0\\0&81&0&0\\0&0&87&0\\0&0&0&51\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}4&1&2&3\\0&3&4&6\\4&3&2&1\\2&0&6&5\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}316&79&158&237\\0&243&324&486\\348&261&174&87\\102&0&306&255\end{bmatrix}$$

b) Egy-egy termékre vonatkozó összes erőforrás-ráfordítás értékben számolva, p^TA:

$$p^TA=\begin{bmatrix}79&81&87&51\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2&3\\0&3&4&6\\4&3&2&1\\2&0&6&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}766&583&962&1065\end{bmatrix}$$

c) Az előállitott termékhez szükséges összes erőforrás-ráfordítás értékben megadva, p^TAX, ahol X vektor az A/b) feladat végeredménye:

$$p^T A X = \begin{bmatrix} 766 & 583 & 962 & 1065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 27 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68656 \end{bmatrix}$$

d) Az előállitott termék összes szerelési költsége:

$$c^T X = \begin{bmatrix} 52 & 90 & 55 & 83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 27 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5223 \end{bmatrix}$$

2.feladat

Kiindulási adatokból a megoldásokhoz szükséges mártix (X) és vektorok (y,b) előállítása:

$$X=\begin{bmatrix}1&1&11&3\\1&4&8&4\\1&6&6&7\\1&7&4&9\\1&9&3&11\\1&11&0&13\end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix}16\\20\\24\\27\\31\\36\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$$

A szükséges műveletek elvégzése:

$$X^TX=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&4&6&7&9&11\\11&8&6&4&3&0\\3&4&7&9&11&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&11&3\\1&4&8&4\\1&6&6&7\\1&7&4&9\\1&9&3&11\\1&11&0&13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&38&32&47\\38&304&134&366\\32&134&246&176\\47&366&176&445\end{bmatrix}$$

$$X^Ty=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&4&6&7&9&11\\11&8&6&4&3&0\\3&4&7&9&11&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\20\\24\\27\\31\\36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}154\\1104\\681\\1348\end{bmatrix}$$

A megoldandó normálegyenlet:

$$\begin{array}{ccccccccc}6a&+&38b&+&32c&+&47d&=&154\\38a&+&304b&+&134c&+&366d&=&1104\\32a&+&134b&+&246c&+&176d&=&681\\47a&+&366b&+&176c&+&445d&=&1348\end{array}$$

A b és c kérdés egyszerre való megoldása érdekében a pivotálást teljes pivottáblán végeztem:

1.lépés, kiinduló pivottábla, a pivotelemet zárójelbe tettem:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	(6)	38	32	47	154	1	0	0	0
e_2	38	304	134	366	1104	0	1	0	0
e_3	32	134	246	176	681	0	0	1	0
e_4	47	366	176	445	1348	0	0	0	1

2.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	19/3	16/3	47/6	77/3	1/6	0	0	0
e_2	0	(190/3)	-206/3	205/3	386/3	-19/3	1	0	0
e_3	0	-206/3	226/3	-224/3	-421/3	-16/3	0	1	0
e_4	0	205/3	-224/3	461/6	425/3	-47/6	0	0	1

3.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	61/5	1	64/5	4/5	-1/10	0	0
a_2	0	1	-103/95	41/38	193/95	-1/10	3/190	0	0
e_3	0	0	(84/95)	-11/19	-79/95	-61/5	103/95	1	0
e_4	0	0	-11/19	59/19	54/19	-1	-41/38	0	1

4.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	0	755/84	2039/84	14207/84	-1265/84	-1159/84	0
a_2	0	1	0	31/84	85/84	-1265/84	113/84	103/84	0
a_3	0	0	1	-55/84	-79/84	-1159/84	103/84	95/84	0
e_4	0	0	0	(229/84)	193/84	-755/84	-31/84	55/84	1

5.lépés:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	0	0	3824/229	45517/229	-3170/229	-3654/229	-755/229
a_2	0	1	0	0	321/458	-3170/229	639/458	521/458	-31/229
a_3	0	0	1	0	-89/229	-3654/229	521/458	295/229	55/229
a_4	0	0	0	1	193/229	-755/229	-31/229	55/229	84/229

A b vektor illetve a közelítő függvény, az inverzmátrix és a főátlóban szereplő elemek összege:

$$b = \frac{1}{458}\begin{bmatrix} 7648 \\ 321 \\ -178 \\ 386 \end{bmatrix} \qquad Y = \frac{3824}{229} + \frac{321}{458}\cdot X_1 - \frac{89}{229}\cdot X_2 + \frac{193}{229}\cdot X_3$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \frac{1}{229}\begin{bmatrix} 45517 & -3170 & -3654 & -755 \\ -3170 & \frac{639}{2} & \frac{521}{2} & -31 \\ -3654 & \frac{521}{2} & 295 & 55 \\ -755 & -31 & 55 & 84 \end{bmatrix}$$

$$\frac{45517}{229} + \frac{639}{458} + \frac{295}{229} + \frac{84}{229} = \frac{92431}{458} \approx \underline{201{,}8144}$$

Ha csak az első ható tényezőt vesszük figyelembe, akkor a kiinduló mátrix (Z), valamint G és H mátrixok

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \qquad G = Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

G és H mátrix számítása pivotálással:

	a_1	a_2
e_1	(1)	1
e_2	1	4
e_3	1	6
e_4	1	7
e_5	1	9
e_6	1	11

	a_1	a_2
a_1	1	1
e_2	0	(3)
e_3	0	5
e_4	0	6
e_5	0	8
e_6	0	10

	a_1	a_2
a_1	1	0
a_2	0	1
e_3	0	0
e_4	0	0
e_5	0	0
e_6	0	0

A Moore-Penrose féle általános inverz (A^+), az inverz összegének valamint a közelítő függvény meghatározása:

$$G^TG = Z^TZ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 38 \\ 38 & 304 \end{bmatrix} \; G^TG$$

$$\det Z = 6 \cdot 304 - 38^2 = 380$$

$$\left(Z^TZ\right)^{-1} = \frac{1}{380} \cdot \begin{bmatrix} 304 & -38 \\ -38 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{190} \end{bmatrix}$$

$$Z^+ = H^T \cdot \left(H \cdot H^T\right)^{-1} \cdot \left(G^TG\right)^{-1} G^T = \left(Z^TZ\right)^{-1} Z^T = \frac{1}{190} \cdot \begin{bmatrix} 152 & -19 \\ -19 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{190} \cdot \begin{bmatrix} 133 & 76 & 38 & 19 & -19 & -57 \\ -16 & -7 & -1 & 2 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\frac{133 + 76 + 38 + 19 - 19 - 57 - 16 - 7 - 1 + 2 + 8 + 14}{190} = 1$$

$$b = Z^+ \cdot y = \frac{1}{190} \cdot \begin{bmatrix} 133 & 76 & 38 & 19 & -19 & -57 \\ -16 & -7 & -1 & 2 & 8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 24 \\ 27 \\ 31 \\ 36 \end{bmatrix} = \frac{1}{190} \begin{bmatrix} 2432 \\ 386 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{64}{5} \\ \frac{193}{95} \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{64}{5} + \frac{193}{95} \cdot X_1$$

3.feladat

Kiindulási adatok:

A közvetlen ráforditás mátrixa (B), a nettó kibocsátás vektora (r) illetve az árvektor (p):

$$B=\begin{bmatrix}0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0,1\\ 0 & 0,2 & 0,1 & 0,2\end{bmatrix}\quad r=\begin{bmatrix}57\\50\\67\\52\end{bmatrix}\quad p=\begin{bmatrix}46\\55\\36\\52\end{bmatrix}$$

a) Teljes ráfordítás meghatározása (T):

$$T^{-1}=(I-B)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0,1\\ 0 & 0,2 & 0,1 & 0,2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,8 & -0,1 & -0,3 & -0,2\\ -0,2 & 0,8 & 0 & -0,3\\ -0,3 & -0,5 & 0,7 & -0,1\\ 0 & -0,2 & -0,1 & 0,8\end{bmatrix}$$

Az a fenti mátrixot Gauss-Jordan módszerrel invertáltam:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}0,8 & -0,1 & -0,3 & -0,2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -0,2 & 0,8 & 0 & -0,3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -0,3 & -0,5 & 0,7 & -0,1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -0,2 & -0,1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{1.lépés}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & -0,125 & -0,375 & -0,25 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0,775 & -0,075 & -0,35 & 0,25 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -0,5375 & 0,5875 & -0,175 & 0,375 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -0,2 & -0,1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{2.lépés}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & -0,3871 & -0,3065 & 1,2903 & 0,1613 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -0,0968 & -0,4516 & 0,3226 & 1,2903 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0,5355 & -0,4177 & 0,5484 & 0,6935 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -0,1194 & 0,7097 & 0,0645 & 0,2580 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{3.lépés}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & -0,6084 & 1,6867 & 0,6627 & 0,7229 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -0,5271 & 0,4217 & 1,4157 & 0,1807 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -0,7801 & 1,0241 & ,1,2952 & 1,8675 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,6166 & 0,1867 & 0,4127 & 0,2229 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{4.lépés}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1,8710 & 1,0699 & 0,9428 & 0,9868\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5813 & 1,7684 & 0,3713 & 0,8549\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1,2604 & 1,8173 & 2,1495 & 1,2653\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,3029 & 0,6693 & 0,3615 & 1,6219\end{array}\right]$$

15

A teljes ráfordítás T mártixa, illetve elemeinek összege:

$$T=\begin{bmatrix}1{,}8710 & 1{,}0699 & 0{,}9428 & 0{,}9868\\ 0{,}5813 & 1{,}7684 & 0{,}3713 & 0{,}8549\\ 1{,}2604 & 1{,}8173 & 2{,}1495 & 1{,}2653\\ 0{,}3029 & 0{,}6693 & 0{,}3615 & 1{,}6219\end{bmatrix}$$

Elemeinek összege: $\underline{17{,}8945}$

Közvetett ráforditás (T-B) mátrixának kiszámítása, valamint az elemeinek összege:

$$T-B=\begin{bmatrix}1{,}8710 & 1{,}0699 & 0{,}9428 & 0{,}9868\\ 0{,}5813 & 1{,}7684 & 0{,}3713 & 0{,}8549\\ 1{,}2604 & 1{,}8173 & 2{,}1495 & 1{,}2653\\ 0{,}3029 & 0{,}6693 & 0{,}3615 & 1{,}6219\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1{,}6710 & 0{,}9699 & 0{,}6428 & 0{,}7868\\ 0{,}3813 & 1{,}5684 & 0{,}3713 & 0{,}5549\\ 0{,}9604 & 1{,}3173 & 1{,}8495 & 1{,}1653\\ 0{,}3029 & 0{,}4693 & 0{,}2615 & 1{,}4219\end{bmatrix}$$

$\underline{17{,}8945-3{,}2=14{,}6945}$

Elemeinek összege: $\underline{14{,}6945}$

b) A termékegységre vonatkozó új érték (m^T) kiszámítása:

T^{-1}

$$m^T=p^T(I-B)=\begin{bmatrix}46 & 55 & 36 & 52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}3 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}8 & 0 & -0{,}3\\ -0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}7 & -0{,}1\\ 0 & -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 11 & 6{,}2 & 12{,}3\end{bmatrix}$$

c) A szektorok bruttó kibocsátásának kiszámítása:

T T

$$q=T\cdot r=\begin{bmatrix}1{,}8710 & 1{,}0699 & 0{,}9428 & 0{,}9868\\ 0{,}5813 & 1{,}7684 & 0{,}3713 & 0{,}8549\\ 1{,}2604 & 1{,}8173 & 2{,}1495 & 1{,}2653\\ 0{,}3029 & 0{,}6693 & 0{,}3615 & 1{,}6219\end{bmatrix}\begin{bmatrix}57\\ 50\\ 67\\ 52\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}274{,}63\\ 190{,}89\\ 372{,}52\\ 159{,}29\end{bmatrix}$$

$q=T\cdot r$

Először meghatároztam Pq s Pr vektorokat illetve PBQ mártixot, ahol P az árvektorból képzett diagonális mátrix.

$$
\begin{array}{cc} & P \quad\quad\quad\quad\quad q \\
Pq = & \begin{bmatrix} 46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 274,63 \\ 190,89 \\ 372,52 \\ 159,29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12632,81 \\ 10498,90 \\ 13410,57 \\ 8282,91 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
PBQ = \begin{bmatrix} 46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 54,9253 & 19,0889 & 111,7548 & 31,8574 \\ 54,9253 & 38,1778 & 0 & 47,7860 \\ 82,3879 & 95,4446 & 111,7548 & 15,9287 \\ 0 & 38,1778 & 32,2516 & 31,8574 \end{bmatrix} =
$$

$q \to Q$

$$
\begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & & \\ 0 & & q_3 & \\ 0 & & & q_4 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2526,56 & 878,09 & 5140,72 & 1465,44 \\ 3020,89 & 2099,78 & 0 & 2628,23 \\ 2965,96 & 3436 & 4023,17 & 573,43 \\ 0 & 1985,25 & 1937,08 & 1656,58 \end{bmatrix}
$$

$$
Pr = \begin{bmatrix} 46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 57 \\ 50 \\ 67 \\ 52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2622 \\ 2750 \\ 2412 \\ 2704 \end{bmatrix}
$$

Pq		PBQ			Pr
12632,81	2526,56	878,09	5140,72	1465,44	2622
10498,90	3020,89	2099,78	0	2628,23	2750
13410,57	2965,96	3436	4023,17	573,43	2412
8282,91	0	1985,25	1937,08	1656,58	2704
	4119,39	2099,78	2309,60	1959,23	

Z^T

g) A pénzegységre eső közvetlen ráfordítás mátrix (A) kiszámítása:

Ehhez kiszámítottam a P mátrix inverzét (P^{-1}), mivel diagonális mátrix ezért inverze a főátló elemeinek reciproka.

d.) Új érték szektoronként:

$$\boxed{Z^T = m^T \cdot Q}$$

$m^T = [15 \quad 11 \quad 6,2 \quad 12,3] \cdot$

$$A = PBP^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 52 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{52} \end{bmatrix}}_{P^{-1}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9,2 & 4,6 & 13,8 & 9,2 \\ 11 & 11 & 0 & 16,5 \\ 10,8 & 18 & 10,8 & 3,6 \\ 0 & 10,4 & 5,2 & 10,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,0836 & 0,3833 & 0,1769 \\ 0,2391 & 0,2 & 0 & 0,3173 \\ 0,2348 & 0,3272 & 0,3 & 0,0692 \\ 0 & 0,1891 & 0,1444 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$R = P \cdot B$$

$$A = \underbrace{P \cdot B}_{R} \cdot P^{-1}$$